# トラップされた中性原子気体における自発的対称性の破れについて(「有限量子多体系の励起構造と相関効果」-原子核・量子ドット・ボース凝縮・クラスターを中心として-,研究会報告)



奥村, 雅彦; 山中, 由也

# トラップされた中性原子気体における自発的対称性の破れについて

奥村 雅彦, 山中 由也[a]

早稲田大学理工学部　169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

$a$) 早稲田大学高等学院　177-0044 東京都練馬区上石神井 3-31-1

1995年に実現した光磁気トラップ (MOT) による Bose–Einstein 凝縮 (BEC) [1] は約80年前に予言された現象の確認というだけでなく、相転移を記述する理論などの基礎理論のテストの場ともなっている。

これまで、2次相転移を記述する理論として量子場の理論における自発的対象性の破れという機構が成功を収めている [2]。ただ、扱いとしては無限に広がる系を想定し、量子場の理論を適用するものである。そこでは、系の励起状態は連続エネルギー固有値を持つことになる。一方、トラップされた BEC は MOT によって空間の限られた領域に限定されている。つまり、空間的には有限系である。その際、励起状態は離散エネルギー固有値を持つことになる。

例え空間的に有限でも当然量子場の理論は適用できる。そこで我々は真空の性質に注目し、トラップされた中性原子気体の系における真空の直交性を解析した。通常の場合、真空の直交性はハイゼンベルグ場のユニタリー非同値な表現を実現する基礎的な性質であり、自発的対称性の破れに関係する重要な性質である [2, 3]。これには量子場の理論における無限自由度が関わっている。従って、BEC で真空の直交性が起こるならば、空間的に有限な量子場の理論でも無限自由度という性格を無視できないことを意味する。

まず、トラップされた中性原子気体を表す作用

$$S=\int dtd^3x\left[\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar}{2m}\nabla^2-V_{\rm trap}(\boldsymbol{x})+\mu\right)\psi(\boldsymbol{x})-\frac{g}{2}\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\right] \quad (1)$$

からはじめる [4]。ここで $m$ は原子の質量、$V_{\rm trap}(\boldsymbol{x})$ は調和振動子型ポテンシャル (MOT)、$\mu$ は化学ポテンシャル、$g$ は S 波散乱長で特徴付けられる相互作用定数である。

この作用を元に、我々は次のような、系の対称性を微小に破る項

$$\Delta S=\varepsilon\bar{\epsilon}\int dtd^3x\left[e^{-i\theta}v(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})+e^{i\theta}v(\boldsymbol{x})\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\right] \quad (2)$$

を加え、ゼロモード、すなわち南部–Goldstone モード [5] を微小パラメーター $\varepsilon$ で制御する [6]。ここで、$e^{i\theta}v(\boldsymbol{x})$ は凝縮相の波動関数、$\bar{\epsilon}$ はこの系における典型的なエネルギースケールである。後に見るように、この微小パラメーター $\varepsilon$ と南部–Goldstone モードが真空の直交性を示すのに重要な働きをする。

次に、場の演算子 $\psi(\boldsymbol{x})$ を凝縮相 $v(\boldsymbol{x})$ と非凝縮相 $\varphi(\boldsymbol{x})$ に分ける。そして、作用 (1) に微小に対称性を破る項 (2) を加えたものからトラップされた BEC を記述するハミルトニアン

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0+\hat{H}_{\rm int}\\ \hat{H}_0 &= \int d^3x\left[\hat{\varphi}^\dagger\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{\rm trap}(\boldsymbol{x})-\mu\right)\hat{\varphi}+\frac{gv^2}{2}\left(4\hat{\varphi}^\dagger\hat{\varphi}+e^{-2i\theta}\hat{\varphi}^2+e^{2i\theta}\hat{\varphi}^{\dagger 2}\right)\right] \quad (3)\end{aligned}$$

$$\hat{H}_{\rm int} \;=\; g\int d^3x\left[v\left(e^{i\theta}\hat{\varphi}^\dagger\hat{\varphi}^\dagger\hat{\varphi}+e^{-i\theta}\hat{\varphi}^\dagger\hat{\varphi}\hat{\varphi}\right)+\frac{1}{2}\hat{\varphi}^\dagger\hat{\varphi}^\dagger\hat{\varphi}\hat{\varphi}\right] \tag{4}$$

を考える。

まず、ある粒子描像 $\hat{a}_n$ をとり、次のような正規直交完全系 $\{u_n(\boldsymbol{x})\}$ をとる。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{\rm trap}(\boldsymbol{x})-\mu+gv^2(\boldsymbol{x})\right]v(\boldsymbol{x})=(\varepsilon_n+\varepsilon\bar{\epsilon})u_n(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

$\hat{a}_n$、$\{u_n(\boldsymbol{x})\}$ で非凝縮相 $\hat{\varphi}(\boldsymbol{x})$ を展開する。

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n u_n(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

(6) を (4) に代入すると、この粒子描像 $\hat{a}$ ではハミルトニアンは対角化されないことがわかる。そこで、次のような一般化された Bogoliubov 変換 [7, 6]

$$\begin{aligned}\hat{b}_n(\theta) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left[{\rm e}^{-i\theta}C_{nm}\hat{a}_m+{\rm e}^{i\theta}S_{nm}\hat{a}_m^\dagger\right]-\sqrt{N_{\rm c}}(C_{n0}+S_{n0})\\ \hat{b}_n^\dagger(\theta) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left[{\rm e}^{i\theta}C_{nm}\hat{a}_m^\dagger+{\rm e}^{-i\theta}S_{nm}\hat{a}_m\right]-\sqrt{N_{\rm c}}(C_{n0}+S_{n0})\end{aligned} \tag{7}$$

を用いて粒子描像 $\hat{a}_n$ から準粒子描像 $\hat{b}_n(\theta)$ に変換する。ここで、$N_{\rm c}$ は凝縮している原子の個数である。すると、ハミルトニアン (4) は対角化される。$\hat{b}(\theta)$ に対応する真空 $|0(\theta)\rangle$ は $\hat{a}$ の真空 $|0\rangle$ と

$$\begin{aligned}|0(\theta)\rangle \;&=\; [\det(C)]^{-\frac{1}{2}}\times\exp\left[-\frac{1}{2}N_{\rm c}(1+C^{-1}S)_{00}\right]\\ &\times\exp\left[-\frac{1}{2}{\rm e}^{2i\theta}\sum_{n,m,l=0}^{\infty}\left(\hat{a}_n^\dagger C_{nm}^{-1}S_{ml}\hat{a}_l^\dagger\right)\right]\\ &\times\exp\left[{\rm e}^{i\theta}\sqrt{N_{\rm c}}\sum_{n,m=0}^{\infty}\left\{\hat{a}_n^\dagger C_{nm}^{-1}(C_{m0}+S_{m0})\right\}\right]|0\rangle\end{aligned} \tag{8}$$

という関係にある [8]。$()_{00}$ は行列の $(0,0)$ 成分である。

ここで、異なる位相を持つ凝縮相 $e^{i\theta}v(\boldsymbol{x})$、$e^{i\theta'}v(\boldsymbol{x})$ に対応する準粒子、$\hat{b}_n(\theta)$、$\hat{b}_n(\theta')$ を考える。それらに対応する真空 $|0(\theta)\rangle$ と、$|0(\theta')\rangle$ の内積は $\theta\neq\theta'$ のとき、

$$\langle 0(\theta)|0(\theta')\rangle\propto\varepsilon^{\frac{1}{4}} \tag{9}$$

という性質を持っていることがわかった。これは $\varepsilon\to 0$ の極限で真空が直交することを示している。

直交する原因として南部–Goldstone モードまで含めて一般化された Bogoliubov 変換により、ハミルトニアンを対角化したことが挙げられる。つまり、Goldstone の定理により存在が要求される南部–Goldstone モードの影響を、一般化された Bogoliubov 変換で非摂動的に真空の構造に取り込んだことによって、エネルギー固有値が離散的であっても真空が直交するのである。あるいは、ゼロモードの無限個の励起が関わっているとも言えよう。

トラップされた BEC が一定の位相を持つことは実験でも確かめられている [9, 10]。しかし、実験の解釈をめぐってはいくつかの説があり [11]、さらなる実験が待たれるところである。

# 参考文献

[1] M.H. Anderson *et al.*, Science **269**, 198 (1995); C.C. Bradley *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995); K.B. Davis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).

[2] レビューとして, H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro and Thermal Physics* —, (AIP, New York, 1993), と、その参考文献を参照.

[3] V.A. Miransky, *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories*, (World Scientific, 1993)

[4] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. PItaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999)

[5] Y. Nambu and G. Yona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961); J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962)

[6] M. Okumura and Y. Yamanaka, *preprint*

[7] H. Ezawa, K. Nakamura, K. Watanabe, and Y. Yamanaka, *Mathematical Physics and Stochastic Analysis — Essays of Honor of Ludvig Streit* —, (World Scientific, 1999)

[8] J.-P. Blaizot and G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems*, (The MIT Press, 1986)

[9] M.R. Andrews, *et al.*, Science **275**, 637 (1997)

[10] D.S. Hall, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1543 (1998)

[11] Y. Castin and J. Dalibard, Phys. Rev. A **55**, 4330 (1997)